Momentengleichung eines Plasmas und Onsager-Relationen

FRIEDRICH HERTWECK

Institut für Plasmaphysik GmbH., Garching bei München

(Z. Naturforschg. **20 a**, 1256—1258 [1965]; eingegangen am 6. Mai 1965)

It is shown that the transport coefficients, following from the linearized 13 moment approximation, satisfy the ONSAGER relations. A short discussion of the transport coefficients is added.

In der voranstehenden Arbeit [1] (im folgenden mit I zitiert) wurde die allgemeine 13-Momenten-Näherung für ein Zwei-Komponenten-Plasma abgeleitet. Für kleine Diffusionsgeschwindigkeit und Druckanisotropie gehen die dort abgeleiteten Momentengleichungen über in die von KOLODNER [2] behandelte lineare Näherung. Die Transportkoeffizienten folgen dann als Lösungen eines linearen Gleichungssystems für die Komponenten des elektrischen und des Wärmestromes. Wir werden zeigen, daß für diese Transportkoeffizienten die ONSAGER-Relationen gelten.

Es sollen hier solche Lösungen der Momentengleichungen untersucht werden, bei denen die durch „äußere Einflüsse" bewirkten dissipativen Prozesse nur kleine Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewicht zur Folge haben. Unter „äußeren Einflüssen" sind hier elektrisches Feld und Temperaturgradient, welche durch geeignete Randbedingungen aufrechterhalten werden, zu verstehen. Solche Strömungen in der Nähe des Gleichgewichts lassen sich bekanntlich durch die NAVIER–STOKESschen Differentialgleichungen beschreiben. Diese Näherung ist dann gültig, wenn sich der Strömungszustand, so wie er durch die Momente beschrieben wird, auf einer freien Weglänge nur wenig ändert, bzw. wenn während einer Stoßzeit die Änderungen der Momente klein sind.

Es ist zweckmäßig, für die folgenden Überlegungen die Entropie einzuführen. Außerdem benötigt man die Gleichung für die Änderung der inneren Energie des Plasmas. Man erhält sie durch Kontraktion der Gleichungen für $p_{\alpha\beta}$ bzw. $P_{\alpha\beta}$ [3]. Setzt man $e = 3\,p/2$ für die thermische Energie (je Volumeneinheit), so erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\,(v_\mu\, e + s_\mu) = -\frac{2}{3}\; e\; \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial v_\nu}{\partial x_\mu}\, \Delta p_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\, \mathfrak{S}^{(\mathrm{e})}_{\mu\mu}\,. \quad (1)$$

Hierbei ist $\Delta p_{\mu\nu} = p_{\mu\nu} - p\, \delta_{\mu\nu}$. Die Glieder auf der rechten Seite beschreiben die Änderung der inneren Energie durch Kompression, innere Reibung und Reibung an den Ionen. Eine entsprechende Gleichung gilt auch für die Ionen.

Die Entropie (je Volumeneinheit) eines idealen Gases ist gegeben durch

$$\eta(e, \varrho) = \frac{3}{2}\,\frac{k}{m}\,\varrho\,(\ln C + \ln e - \tfrac{5}{3}\ln \varrho)\,, \quad (2)$$

wobei e hier die innere Energie bedeutet.

Diese Formel gilt auch für das Plasma, wenn die innere Energie allein durch die thermische Energie $3\,p/2$ gegeben ist, d. h. wenn man die Wechselwirkungsenergie der Teilchen vernachlässigen kann. Aus der DEBYE-Theorie folgt [4], daß sie von der Größenordnung $1/\Lambda$ ist. Da die FOKKER–PLANCK-Gleichung Gl. (I, 2.1) nur in der Näherung $\ln \Lambda \gg 1$ gilt, ist diese Vernachlässigung erlaubt.

Durch partielle Differentiation von η nach e und ϱ folgt

$$\frac{\partial \eta}{\partial e} = \frac{3}{2}\,\frac{k}{m}\,\frac{\varrho}{e} = \frac{n\,k}{p}\,,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \varrho} = \frac{\eta}{\varrho} - \frac{5}{2}\,\frac{k}{m}\,.$$

Damit erhält man für die zeitliche Änderung der Entropiedichte

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial e}\,\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial \varrho}\,\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{1}{T}\,\frac{\partial e}{\partial t} + \left(\frac{\eta}{\varrho} - \frac{5}{2}\,\frac{k}{m}\right)\frac{\partial \varrho}{\partial t}, \quad (3)$$

[1] F. HERTWECK, Z. Naturforschg. **20 a**, 1243 [1965].

[2] I. KOLODNER, Moment Description of Gas Mixtures, AEC-Report NYO-7980.

[3] Alle Bezeichnungen sind hier aus (I) übernommen.

[4] L. D. LANDAU u. E. M. LIFSHITZ, Statistical Physics, Pergamon Press, London 1958, Kap. VII.

Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung") beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

wobei in der zweiten Zeile die Temperatur eingeführt wurde durch die Beziehung $p = n\,k\,T$. Es muß an dieser Stelle betont werden, daß Gl. (2) für die Entropie nur im Falle thermodynamischen Gleichgewichts gilt, so daß durch Gl. (3) nur solche instationären Zustände beschrieben werden, die hinreichend nahe am Gleichgewicht sind. Allgemeiner hat man statt der Entropie die BOLTZMANNsche H-Funktion einzuführen, welche im Gleichgewicht (bis auf einen konstanten Faktor) in die Entropie übergeht (vgl. GRAD [5]). Setzt man in Gl. (3) die Kontinuitäts- und die Energiegleichung ein, so folgt nach einigen Umformungen für die Elektronenkomponente

$$\frac{\partial \eta_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{s_\mu}{T_e} + v_\mu\,\eta_e\right) = s_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{1}{T_e}\right) + \frac{\mathfrak{S}^{(e)}_{\nu\nu}}{2\,T_e} - \frac{\Delta p_{\mu\nu}}{T_e}\,\frac{\partial v_\nu}{\partial x_\mu}\,. \tag{4}$$

Die Klammer auf der linken Seite ist offenbar als Entropiestrom zu interpretieren, mit einem Konvektionsanteil $v_\mu\,\eta_e$ und dem Wärmestromanteil s_μ/T_e. Auf der rechten Seite stehen Terme, welche eine Entropieerzeugung beschreiben, und zwar durch Wärmeleitung, durch Reibung an den Ionen (also durch OHMsche Verluste) und durch innere Reibung. Eine analoge Gleichung gilt für die Entropie η_i der Ionenkomponente; man erhält die Gleichung für die Gesamtentropie, wenn man beide Gleichungen addiert.

Meistens werden die in einem Plasma auftretenden elektrischen Ströme und Wärmeströme vorwiegend durch die Elektronen bestimmt, insbesondere dann, wenn diese Ströme klein sind. Es ist also sinnvoll, die Näherung zu betrachten, in der die Ionen ruhen, und die Stoßmomente nach kleinen Strömen zu entwickeln [2]. Formal haben die Momentengleichungen dann für d_α und s_α stationäre Lösungen, während sich $\partial p/\partial t \sim d_\mu\,d_\mu$ ergibt. Wenn die Ströme hinreichend klein sind, wird sich p während einer Stoßzeit nur sehr wenig ändern, so daß die Gleichungen für d_α und s_α die Transportkoeffizienten für den Grenzfall kleiner Ströme liefern.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß diese Transportkoeffizienten die ONSAGER-Relationen erfüllen. Wir gehen aus von den stationären Lösungen der Bewegungs-, Diffusions- und Wärmeleitungsgleichung eines ruhenden Plasmas. Alle Größen der Ordnung $\mathfrak{d}^2$, $\mathfrak{q}^2$ und $\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{q}$ werden vernachlässigt, also auch $\Delta p_{\alpha\beta}$. Man erhält:

$$\frac{1}{\varrho_e}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(p+P) - \omega_{\alpha\mu}\,d_\mu = 0\,, \tag{5}$$

$$-\varepsilon_\alpha + \omega_{\alpha\mu}\,d_\mu - \frac{1}{\varrho_e}\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\varrho_e}\mathfrak{S}^{(e)}_\alpha\,, \tag{6}$$

$$-\omega_{\alpha\mu}\,s_\mu + \frac{5}{2}\,p\,\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{p}{\varrho_e}\right) = \mathfrak{T}^{(e)}_\alpha\,. \tag{7}$$

Wir setzen voraus, daß $p = P$, was immer dann zutrifft, wenn die durch OHMsche Verluste den Elektronen zugeführte Energie klein ist gegen die in der gleichen Zeit an die Ionen durch Stöße abgegebene Energie. Dann kann man in Gl. (6) den Druckgradienten mit Hilfe von Gl. (5) eliminieren und erhält

$$\varrho_e\,\varepsilon_\alpha - \tfrac{1}{2}\,\varrho_e\,\omega_{\alpha\mu}\,d_\mu = \mathfrak{S}^{(e)}_\alpha. \tag{8}$$

Nach Gl. (2.21) kann man

$$\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{S}^{(e)}_{\mu\mu} = d_\mu\,\mathfrak{S}^{(e)}_\mu + O(m_e/m_i)$$

setzen, so daß mit Gl. (8) $\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{S}^{(e)}_{\mu\mu} = \varrho_e\,d_\mu\,\varepsilon_\mu$ folgt. Damit erhält man für die rechte Seite der Gl. (4)

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{\text{Erzeugung}} = s_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{1}{T}\right) + d_\mu\,\frac{\varrho_e\,\varepsilon_\mu}{T}\,. \tag{9}$$

In der irreversiblen Thermodynamik faßt man die Faktoren von s_μ und d_μ als Kräfte auf, welche die irreversible Zustandsänderung bewirken und macht für die Ströme s_α und d_α den Ansatz

$$\begin{aligned} d_\alpha &= L^{(11)}_{\alpha\mu}\,\frac{\varrho_e\,\varepsilon_\mu}{T} + L^{(12)}_{\alpha\mu}\,\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{1}{T}\right),\\ s_\alpha &= L^{(21)}_{\alpha\mu}\,\frac{\varrho_e\,\varepsilon_\mu}{T} + L^{(22)}_{\alpha\mu}\,\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{1}{T}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Die ONSAGER-Relationen fordern zwischen den Koeffizienten die Beziehungen [6]

$$\begin{aligned} L^{(11)}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{B}) &= L^{(11)}_{\beta\alpha}(-\boldsymbol{B}),\\ L^{(22)}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{B}) &= L^{(22)}_{\beta\alpha}(-\boldsymbol{B}),\\ L^{(12)}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{B}) &= L^{(21)}_{\beta\alpha}(-\boldsymbol{B})\,; \end{aligned} \tag{11}$$

$\boldsymbol{B}$ ist das Magnetfeld. Wie man leicht zeigen kann, müssen diese Relationen auch für die reziproke Matrix L^* gelten, welche die Kräfte als Linearkombination der Ströme ausdrückt. Um diese Matrix L^* zu finden, müssen wir zuerst die Stoßmomente $\mathfrak{S}^{(e)}_\alpha$ und $\mathfrak{T}^{(e)}_\alpha$ nach d_α und s_α entwickeln, wobei quadra-

[5] H. GRAD, Commun. Pure Appl. Math. **2**, 331 [1949].

[6] Vgl. S. R. DE GROET, Thermodynamics of Irreversible Processes, North Holland Publishing Co., Amsterdam 1951, Kap. I und VIII.

tische Terme vernachlässigt werden. Man erhält nach entsprechenden Rechnungen:

$$\mathfrak{S}_\alpha^{(e)} = A\left(d_\alpha + \frac{3}{5\,p}\,s_\alpha\right),$$

$$\mathfrak{T}_\alpha^{(e)} = A\,\frac{p}{\varrho}\left[-\frac{3}{2}\,d_\alpha - \frac{2}{5}\left(\sqrt{12} + \frac{13}{4}\right)\frac{s_\alpha}{p}\right], \quad (12)$$

wobei $\quad A = 4\,n^2\,\Gamma_0/[3\,m_e\,\sqrt{\pi}\,\beta^{3/2}]$.

Setzt man dies in Gl. (7) und Gl. (8) ein, so folgt

$$\frac{\varrho_e\,\varepsilon_\alpha}{T} = \left(\frac{A}{T}\,\delta_{\alpha\mu} + \frac{\varrho_e}{2\,T}\,\omega_{\alpha\mu}\right)d_\mu + \frac{3\,A}{5\,p\,T}\,s_\alpha\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{3\,A}{5\,p\,T}\,d_\alpha + \left[\frac{4\,A}{25\,p^2\,T}\left(\sqrt{2} + \frac{13}{4}\right)\delta_{\alpha\mu} - \frac{2\,\varrho\,\omega_{\alpha\mu}}{5\,p^2\,T}\right]s_\mu\,. \quad (13)$$

Da die $\omega_{\alpha\mu}$ eine antisymmetrische Matrix darstellen, deren Elemente proportional zu den Magnetfeldkomponenten sind, sind offenbar die Relationen Gl. (11) erfüllt.

Durch Auflösung dieses Gleichungssystems nach den Strömen d_α und s_α erhält man die übliche Form der Transportkoeffizienten. Es sei hier noch bemerkt, daß man in der Literatur häufig fehlerhafte Angaben der Transportkoeffizienten bei Vorhandensein von Magnetfeldern findet. Der Fehler ist meist, daß man nicht berücksichtigt hat, daß bei gegebenem Elektrischen Feld und Temperaturgradienten elektrische Ströme und Wärmeströme auftreten, die von dem Vektorprodukt mit $\boldsymbol{B}$ herrühren. Wenn diese Ströme wegen entsprechender Randbedingungen nicht auftreten können, bauen sich zusätzliche elektrische Felder und Temperaturgradienten auf, die diese Ströme unterdrücken. Diese Felder aber muß man in Gl. (13) einsetzen, um zu richtigen Ergebnissen zu gelangen.

Wenn Temperaturgradient und Magnetfeld Null sind, folgt aus Gl. (13) als Zusammenhang zwischen elektrischem Strom j und elektrischem Feld E die Beziehung

$$j = \sigma\,E\,,$$

wobei

$$\sigma = 0{,}569\;\sigma_L\,, \qquad \sigma_L = \frac{2\,(2\,k\,T_e)^{3/2}}{\pi^{3/2}\,m_e^{1/2}\,e^2\,\ln\Lambda}\,.$$

σ_L ist die Leitfähigkeit des Lorentz-Gases. (Beim Lorentz-Gas werden die Ionen gleichfalls als ruhend angenommen, zusätzlich wird aber noch die Wechselwirkung der Elektronen untereinander vernachlässigt. Die Fokker–Planck-Gleichung wird dann linear in der Verteilungsfunktion und läßt sich im entsprechenden stationären Fall exakt lösen.) Zum Vergleich geben wir die Werte der Leitfähigkeit von Cowling [7] und Spitzer und Härm [8]:

$$\sigma_{\text{Cowling}} = 0{,}567\;\sigma_L\,; \qquad \sigma_{\text{Sp}+\text{H}} = 0{,}582\;\sigma_L\,.$$

Der Unterschied zu $\sigma_{\text{Sp}+\text{H}}$ beträgt also etwa 2%. Der Gang der Rechnung bei Spitzer und Härm soll zum Vergleich kurz skizziert werden: Die Elektronenverteilung wurde approximiert durch

$$f_{\text{Sp}+\text{H}}(\mathfrak{u}) = f_m(u)\,[1 + \cos\vartheta\,D(u)\,]\,,$$

$f_m(u)$ ist die Maxwell-Verteilung, ϑ der Winkel zwischen $\mathfrak{u}$ und elektrischem Feld $\mathfrak{E}$. Setzt man $f_{\text{Sp}+\text{H}}(\mathfrak{u})$ in die Fokker–Planck-Gleichung (2.1) ein und linearisiert in $D(u)$, so erhält man eine Integro-Differentialgleichung für $D(u)$, deren Koeffizienten durch das Fehlerintegral $\Phi(u)$ ausdrückbar sind. Man erhält die Lösungen durch numerische Integration. Der Strom berechnet sich aus

$$j = e\int u\cos\vartheta\,f_{\text{Sp}+\text{H}}(\mathfrak{u})\,d\mathfrak{u}\,.$$

Durch die Momentengleichungen wird also $D(u)$ durch ein Polynom 3. Ordnung so approximiert, daß „im Mittel" die Integro-Differentialgleichung befriedigt wird. Die Koeffizienten dieses Polynoms sind lineare Funktionen in d_1 und q_1.

Interessant ist noch der Vergleich mit dem Lorentz-Gas, für welches $D_L(u) = \text{const}\cdot u^4$. Die Funktion u^4 soll also durch ein Polynom 3. Ordnung approximiert werden. Die Wechselwirkung der Elektronen vernachlässigt man in Gl. (12), indem man $\sqrt{2}$ streicht. Man erhält dann

$$(\sigma_L)_{\text{Momentengl.}} = 0{,}96\;\sigma_L\,.$$

[8] L. Spitzer u. R. Härm, Phys. Rev. **89**, 977 [1953].
[7] T. G. Cowling, Proc. Roy. Soc., Lond. A **183**, 453 [1945].